Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006
SOLUŢII ŞI BAREMURI

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Găsiţi valoarea maximă a expresiei

$$(x^3+1)(y^3+1),$$

pentru $x, y \in \mathbb{R}$ ce satisfac $x+y=1$.

Soluţie. Se notează $xy=t$; deoarece $x+y=1$ se obţine $(x^3+1)(y^3+1)=t^3-3t+2$ .... 2 puncte

Din $x+y=1$ se deduce că $t=xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ .... 1 punct

Se arată că $t^3-3t+2 \le 4$ pentru orice $t \le \frac{1}{4}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $t=-1$ .... 2 puncte

Se deduce că valoarea maximă este 4 deoarece $(x^3+1)(y^3+1) \le 4$ pentru $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x+y=1$ şi $(\phi^3+1)(-1/\phi^3+1)=4$, unde ϕ este o rădăcină a ecuaţiei $z^2-z-1=0$. .... 2 puncte

Observaţie. De fapt, pentru $x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$[x^3+(x+y)^3][y^3+(x+y)^3] \le 4(x+y)^6,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x^2+3xy+y^2=0$.

Subiectul 2. Se consideră triunghiurile isoscele ABC şi DBC având baza BC şi $\angle ABD=90^\circ$. Fie M mijlocul segmentului BC. Punctele E, F, P sunt alese astfel încât $E \in (AB), P \in (MC), C \in (AF)$ iar $\angle BDE=\angle ADP=\angle CDF$. Să se arate că P este mijlocul segmentului EF şi $DP \perp EF$.

Soluţie. Notăm $u=\angle BDE=\angle MDP=\angle CDF$. În triunghiurile dreptunghice DBE, DMP, DCP avem

$$\cos\angle BDE=\frac{BD}{DE},\ \cos\angle MDP=\frac{DM}{DP},\ \cos\angle CDF=\frac{DC}{DF},$$

de unde $BD=DE\cos u, DM=DP\cos u, DC=DF\cos u$. 3 puncte

Avem $\angle BDC=\angle EDF$ şi $\angle BDM=\angle EDP$ .... 1 punct

De aici rezultă că triunghiurile DBC şi DEF sunt asemenea şi punctele M, F omoloage........ 2 puncte

Punctul M este mijlocul lui BC, deci P este mijlocul lui EF. Din faptul că $DM \perp BC$ rezultă $DP \perp EF$....................1 punct

Subiectul 3. Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de rază r, pentru care există un punct P pe latura CD astfel încât $CB = BP = PA = AB$.

a) Să se arate că există puncte A, B, C, D, P care îndeplinesc condiţiile de mai sus;

b) Să se arate că $PD = r$.

Soluţie. a) Fie AB coardă, $AB < r\sqrt{3}$ şi P în interiorul cercului astfel încât triunghiul ABC este echilateral. Fie C punct pe cerc astfel încât $BP = BC$ şi $AC \cap BP \neq \emptyset$. .... 1 punct

Dreapta PC intersectează a doua oară cercul în D şi $ABCD$ este patrulaterul căutat. .... 1 punct

b) Notăm $\angle BPC = \angle BCP = x$. Cum triunghiul BPC este isoscel, rezultă $\angle PBC = 180° - 2x$. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil cu $\angle BCD = x$ deci $\angle DAB = 180° - x$. De aici $\angle DAP = 120° - x, \angle ABC = 240° - 2x$ şi deci $\angle ADC = 2x - 60°$. Din triunghiul ADP avem $\angle APD = 120° - x$, deci $DA = DP$. .... 3 puncte

Triunghiurile ABD şi PBD sunt congruente, deci $\angle ABD = \angle PBD = 30°$ .... 1 punct

Din faptul că $\angle ABD = 30°$ obţinem $DP = DA = r$. .... 1 punct

Subiectul 4. La o competiţie de tenis de masă desfăşurată pe parcursul a 4 zile au participat $2n$ elevi, $n \geq 5$. În fiecare zi fiecare elev a jucat câte un meci (fiind posibil ca aceeaşi pereche să se întâlnească în mai multe zile). Demonstraţi că această competiţie se poate termina cu un singur câştigător, cu trei elevi la egalitate pe locul al doilea şi fără să existe vreun jucător care să fi pierdut toate cele 4 partide. Câţi elevi au câştigat un singur meci şi câţi exact două meciuri, în aceste condiţii?

Soluţie. Să notăm cu n_k numărul elevilor care au câştigat exact k meciuri, $0 \leq k \leq 4$; în condiţiile problemei avem

$$n_0 = 0,\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2n \geq 10 \qquad (1)$$

Numărul total de meciuri jucate este $4n$, deci

$$4n = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 \text{ (numărăm câştigătorii)} \qquad (2)$$

$$4n = 3 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 + 0 \cdot n_4 \text{ (numărăm învinşii)} \qquad (3)$$

deci $2n_1 = 2n_3 + 4n_4$ şi înlocuind în (1) obţinem

$$n_2 + 2n_3 + 3n_4 = 2n \qquad (4)$$

. . . . 1 punct

Aplicând acum restul condiţiilor problemei

n_4	n_3	n_2	n_1		$n_2+2n_3+3n_4$
0	0	1	3		1
0	1	0	3		2
1	0	0	3		3
0	1	3			5
1	0	3			6

conduce imediat la contradicţie . . . . 1 punct

Rămâne cazul $n_4 = 1, n_3 = 3$, deci $n_2 = 2n - 9, n_1 = 5$ . . 2 puncte

Pentru un model de astfel de competiţie, să notăm cu a cîştigătorul; b_1, b_2, b_3 cei trei clasaţi pe locul al doilea; c unul din cei $2n-9$ câştigători de câte două meciuri; d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 cei cinci câştigători de câte un meci. Rămân $2n-10$ câştigători de câte două meciuri, pe care (pentru $n > 5$) îi vom nota $c_1, \ldots, c_{2n-10}$. Finalmente, xy este notaţia faptului că x l-a învins pe y.

Ziua						
1	ab_1	cd_2	b_2d_3	b_3d_4	d_1d_5	c_ic_{i+1}
2	ab_2	b_1d_1	cd_3	b_3d_4	d_2d_5	c_ic_{i+1}
3	ab_3	b_1d_1	b_2d_2	d_5c	d_3d_4	$c_{i+1}c_i$
4	ac	b_1d_1	b_2d_2	b_3d_3	d_4d_5	$c_{i+1}c_i$

cu $i = 1, 3, \ldots, 2n - 11$ . . . . 3 puncte

Observaţii.

1. Este suficientă scrierea uneia dintre relaţiile de tipul (2),(3),(4) pentru obţinerea punctului din barem.

2. Pentru un model particular ($n = 5$, etc.) corect, se acordă 1 punct.